第六章　对策论
（Game Theory）

- 对策论历史与引例
- 相关概念
- 二人有限零和对策
- 二人有限非零和对策

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

第一部分 对策论历史与引例

一、对策论的定义

又称博弈论，是研究决策主体的行为发生直接相互作用时的决策以及这种决策的均衡问题的学科。

是研究具有竞争、对抗、冲突性质的现象的数学理论和方法。

影响因素：其他决策者，自然。

一、对策理论的历史

- 我国春秋战国时期的“孙子兵法”；
- 围棋，发明于我国殷代;
- 对策作为一种数学理论开始于1944年。

由美国数学家*冯·诺依曼*(Von. Neumann)和经济学家*摩根斯坦*(Morgenstern))发表了题为“博弈论与经济行为”的著作

- 1950年，纳什完成博士论文“非合作博弈”,
- 九十年代以来博弈理论在金融、管理和经济领域中得到广泛应用

- 博弈论和诺贝尔经济奖

- **1994: 非合作博弈。**纳什(Nash)、泽尔腾（Selten）、海萨尼（Harsanyi）

- **1996: 不对称信息激励理论。**莫里斯（Mirrlees）和维克瑞（Vickrey）

- **2001: 不完全信息市场博弈。**阿克罗夫（Akerlof）（商品市场）、斯潘塞（Spence）（教育市场）、斯蒂格里兹（Stiglitze）（保险市场）

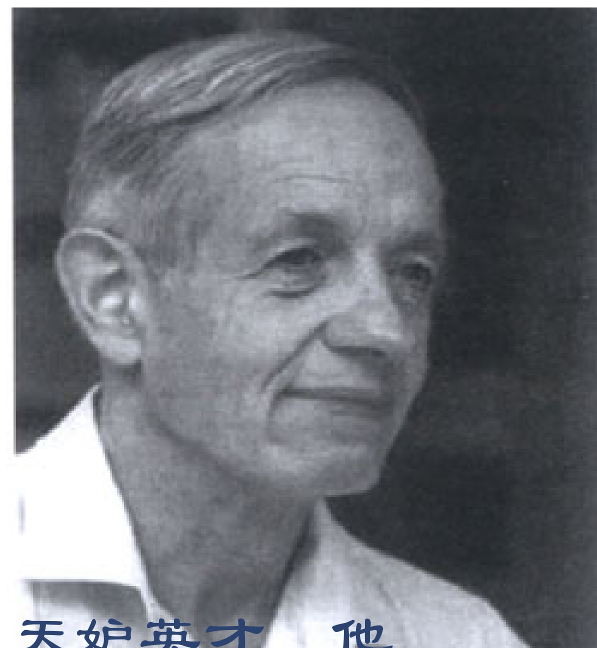
- 博弈论和诺贝尔经济奖

■**2002:** **实验经济学。**史密斯（Smith），心理经济学：卡尼曼（Kahneman）

■**2005:** **合作与冲突理论。**罗伯特·奥曼（Robert J.Aumann ）与托马斯·谢林（Thomas C. Schelling ），通过博弈理论的分析增强世人对合作与冲突的理解

■**2007:** **机制设计理论。**赫维茨(Leonid Hurwicz)，马斯金(Eric S. Maskin)，罗杰(Roger B.Myerson)，创立和发展了“机制设计理论”方面所作的贡献，其中博弈论是重要的研究工具。

纳什简介



1994年诺贝尔经济学奖获得者，纳什在普林斯顿读博士时刚刚20岁出头，他的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他两篇相关文章确立了他博弈论大师的地位。到上世纪50年代末，他已是闻名世界的大牌科学家了。

然而，正当他的事业如日中天的时候，天妒英才，他得了严重的精神分裂症。多亏前妻艾莉西亚的爱心呵护和普林斯顿大学诸多朋友和同事无私的帮助才没有使他流落街头，并最终把他推上诺贝尔经济学奖宝座（1994年获奖）。

他的故事被好莱坞拍成了电影《美丽心灵》，该影片获得了2002年奥斯卡金像奖的四项大奖

三、对策问题举例

1. 囚犯困境（Prisoners' dilemma）

- 囚犯困境是图克（Tucker）1950年提出的
- 该对策是博弈论最经典、著名的博弈
- 该博弈本身讲的是一个法律刑侦或犯罪学方面的问题，但可以扩展到许多经济问题，以及各种社会问题，可以揭示市场经济的根本缺陷

三、对策问题举例

1. 囚犯困境（Prisoners’ dilemma）

两名囚犯I和II因涉嫌抢劫被捕。警方 因证据不足先将二人分关二室，并宣布:

若二人均不坦白，则只能因藏有枪支而被判刑1年;

若有一人坦白而另一个不坦白，则坦白者无罪释放，不坦白者 被判刑10年;

若二人都坦白了，则同判8年。

此二人确系抢劫犯，请分析他们的抉择。

I \ II	坦白	抵赖
坦白	-8，-8	0，-10
抵赖	-10，0	-1，-1

均衡解：

二人均坦白

囚徒困境说明了什么

- 在（坦白、坦白）这个组合中，A和B都不能通过单方面的改变行动增加自己的收益，于是谁也没有动力游离这个组合，因此这个组合是纳什均衡，也叫非合作均衡。
- 囚徒困境反映了个人理性和集体理性的矛盾。如果A和B都选择抵赖，各判刑1年，显然比都选择坦白各判刑8年好得多。当然，A和B可以在被警察抓到之前订立一个"攻守同盟"，但是这可能不会有用，因为它不构成纳什均衡，没有人有积极性遵守这个协定,显然最好的策略是双方都抵赖.

例：军备竞赛

两国都可以声称有两种选择：增加军备（背叛）、或是达成削减武器协议（合作）。两国都无法肯定对方会遵守协议，因此两国最终会倾向增加军备。似乎自相矛盾的是，虽然增加军备会是两国的“理性”行为，但结果却显得“非理性”（例如会对经济造成都有损坏等）。

冷战期间，美苏两国的军备竞赛，使得两国的社会福利都变得更糟。

例：公共产品的供给博弈

如果大家都出钱兴办公用事业，所有人的福利都会增加。问题是，如果我出钱你不出钱，我得不偿失；而如果你出钱我不出钱，我就可以占便宜。

最终结果：每个人都“不出钱”。这种纳什均衡使得所有的人的福利都没法得到提高。

例：寡头垄断企业定价的博弈

卡特尔价格不是纳什均衡，

最终结果：每个企业按照纳什均衡的价格进行定价，其利润小于卡特尔价格条件下的利润。

案例分析：　生活中的“囚徒困境”例子

——　*商家价格战*

出售同类产品的商家之间本来可以通过共同将价格维持在高位而获利，但实际上却是相互杀价，结果都赚不到钱。

当一些商家共谋将价格抬高，消费者实际上不用着急，因为商家联合维持高价的垄断行为一般不会持久，可以等待垄断的自身崩溃，价格就会掉下来。

- 譬如，2000年我国几家生产彩电的大厂商合谋将彩电价格维持高位，他们搞了一个“彩电厂家价格自律联盟”，并在深圳举行了由多家彩电厂商首脑参加的“彩电厂商自律联盟高峰会议”。当时，国家有关部门还未出台相关的反垄断法律，对于这种在发达国家明显属于违法行为的所谓“自律联盟”，国家在法律上暂时还是无能为力的。寡头厂商在光天化日之下进行价格合谋，并且还通过媒体大肆炒作，这在发达国家是不可思议的。

但是，尽管政府当时无力制止这种事情，公众也不必担心彩电价格会上涨。这是因为，“彩电厂商自律联盟”只不过是一种“囚徒困境”，彩电价格不会上涨。在高峰会议之后不到二周，国内彩电价格不是上涨而是一路下跌。这是因为厂商们都有这样一种心态：无论其他厂商是否降价，我自己降价是有利于自己的市场份额扩大的。

问题：明确该对策问题的各要素：局中人、策略集、赢得矩阵



生活中的例子

- 囚徒困境现象在现实生活中比比皆是。姜昆和唐杰忠过去说过一个公共楼道占用问题的相声。住户在公共楼道里堆满了杂物，结果大家都极不方便，以致即将分娩的妇女都没法及时被送往医院。但你如果不占用公共楼道，别人也会占用。每一居住面积狭小的住户从自我利益最大化出发，都会选择占用。但占用的结果却最终损害了大家的利益。

囚徒困境的意义

- “囚徒的两难选择”有着广泛而深刻的意义。个人理性与集体理性的冲突，各人追求利己行为而导致的最终结局是一个“纳什均衡”，也是对所有人都不利的结局。他们两人都是在坦白与抵赖策略上首先想到自己，这样他们必然要服长的刑期。只有当他们都首先替对方着想时，或者相互合谋(串供)时，才可以得到最短时间的监禁的结果。

对经典经济学的冲击

- “纳什均衡”首先对亚当·斯密的“看不见的手”的原理提出挑战。按照斯密的理论，在市场经济中，每一个人都从利己的目的出发，而最终全社会达到利他的效果。
- 《国富论》：“通过追求(个人的)自身利益，他常常会比其实际上想做的那样更有效地促进社会利益。”
- 从“纳什均衡”我们引出了“看不见的手”的原理的一个悖论：从利己目的出发，结果损人不利己，既不利己也不利他。两个囚徒的命运就是如此。从这个意义上说，“纳什均衡”提出的悖论实际上动摇了西方经济学的基石。

NASH均衡条件下的行为规则

- 合作是有利的“利己策略”。但它必须符合以下黄金律：按照你愿意别人对你的方式来对别人，但只有他们也按同样方式行事才行。 所谓“己所不欲勿施于人”。但前提是人所不欲勿施于我。

第二部分 相关概念

➢ 对策分析的基本假设

（1）个人理性

假设当事人在决策时能够充分考虑他所面临的局势，并能做出合乎理性的选择。

（2）最大化自己的收益

假设当事人在决策时通常选择使自己收益最大化的策略。

	坦白	抵赖
坦白	-8，-8	0，-10
抵赖	-10，0	-1，-1

- 对策问题的基本要素

（1）局中人（**Players**）

参与对抗的各方；不一定指自然人

（2）策略集（**Strategies**）

局中人选择对付其它局中人的行动方案称为策略；

某局中人的所有可能策略全体称为策略集；

对策双方的策略集一般记为：

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}\quad D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$$

例：因犯困境中，每个因犯均有2个策略：

{坦白，抵赖}

	坦白	抵赖
坦白	-8，-8	0，-10
抵赖	-10，0	-1，-1

（3）局势

当每个局中人从各自策略集合中选择一策略而组成的策略组成为一个局势，用 (s_i, d_j)来表示。

（4）赢得（支付）

局中人采用某局势时的收益值。

例：当局中人甲选择策略s_i，局中人乙选策略d_j时，局中人甲的赢得值可用 $R_{甲}(s_i, d_j)$表示。

继续讨论“囚犯困境”问题：

	坦白	抵赖
坦白	-8，-8	0，-10
抵赖	-10，0	-1，-1

启示：个人理性和集体理性的矛盾

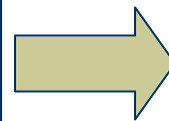
当一个社会中的每个个体都为自身的利益打算时，即使大家都遵守社会规则，个体的行为不一定能实现个体的最佳利益。

结论：政府在社会经济活动中的组织协调工作是必需的，放任自流不是导致全社会最大福利的最佳政策。

2、智猪博弈

猪圈里有两头猪：一头大猪、一头小猪，猪圈的一头有一个猪食槽，另一头安装一个按钮，控制着猪食的供应。按一下按钮就会有**10**个单位的猪食进槽，但谁按按钮谁就需要付**2**个单位的成本。若大猪先到，大猪吃到**9**个单位，小猪只能吃**1**个单位；若同时到，大猪吃到**7**个单位，小猪吃**3**个单位；若小猪先到，大猪吃到**6**个单位，小猪吃**4**个单位；

		小猪：按	小猪：等待
大猪	按	**5，1**	**4，4**
	等待	**9，-1**	**0，0**



Nash均衡：

（按，等待）

智猪博弈的应用举例

		小猪	
		按	等待
大猪	按	5，1	4，4
	等待	9，-1	0，0

例：大、小股东的职责

股份公司中，股东承担着监督经理的职能。监督需要成本，大股东从监督中获得的好处要多于小股东。

Nash均衡：大股东担当起搜集信息、监督经理的责任，小股东“搭便车”。

		小猪	
		按	等待
大猪	按	5，1	4，4
	等待	9，-1	0，0

例：股票市场中的大户、小户

例：市场中的大企业、小企业

进行研究开发、为新产品做广告，对大企业是值得的，对小企业则得不偿失。

所以，一种可能的情况是，小企业把精力花在模仿上，或等待大企业用广告打开市场后出售廉价产品。

		小猪	
		按	等待
大猪	按	5，1	4，4
	等待	9，-1	0，0

例：公共产品的提供

村里住两户人家，一户富，一户穷，有一条路年久失修。这时候，富户一般会承担起修路的责任，穷户则很少这样干，因为富户常常高朋满座，路用得更多。穷户对于修路无所谓。

3.中国的游戏——“剪刀、石头、布”

小孩A与B猜手,若规定赢得1分，平得0分，输得 -1分，则 A的赢得可用下表来表示。

赢 A \ B	石头	剪子	布
石头	0	1	-1
剪子	-1	0	1
布	1	-1	0

分析：无确定最优解，可用“混合策略”求解。

4.齐王赛马

战国时期，齐国国王有一天提出要与大将军田忌赛马。田忌答应后，双方约定：

1)每人从上中下三个等级中各出一匹马，共出三匹；
2) 一共比赛三次，每一次比赛各出一匹马；
3) 每匹被选中的马都得参加比赛，而且只能参加一次；
4) 每次比赛后输者要付给胜者一千金。

当时在三个不同等级中，齐王的马要比田忌的强些，看来田忌要输三千金了，但由于田忌采用了谋士的意见，最终反败为胜。谋士的主意是：

1) 每次比赛前先让齐王说出他要出哪匹马；
2) 让田忌用下马对齐王上马；
3) 用中马对齐王下马；
4) 用上马对齐王中马。

"齐王赛马"齐王在各局势的赢得表（单位：千金）

田忌 / 齐王	β_1（上中下）	β_2（上下中）	β_3（中上下）	β_4（中下上）	β_5（下上中）	β_6（下中上）
α_1（上中下）	3	1	1	1	-1	1
α_2（上下中）	1	3	1	1	1	-1
α_1（中上下）	1	-1	3	1	1	1
α_1（中下上）	-1	1	1	3	1	1
α_1（下上中）	1	1	1	-1	3	1
α_1（下中上）	1	1	-1	1	1	3

“齐王赛马”齐王在各局势的赢得表（单位：千金）

田忌 / 齐王	β_1（上中下）	β_2（上下中）	β_3（中上下）	β_4（中下上）	β_5（下上中）	β_6（下中上）
α_1（上中下）	3	1	1	1	-1	1
α_2（上下中）	1	3	1	1	1	-1
α_1（中上下）	1	-1	3	1	1	1
α_1（中下上）	-1	1	1	3	1	1
α_1（下上中）	1	1	1	-1	3	1
α_1（下中上）	1	1	-1	1	1	3

- 齐王的策略集: $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$
- 田忌的策略集：$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6\}$

五、对策的分类

1、按局中人数目
- 两人对策
- 多人对策

2、按局中人赢得
- 零和对策
- 非零和对策

3、按解的表达形式
- 纯策略对策
- 混合策略对策

4、按对策过程
- 静态对策
- 动态对策

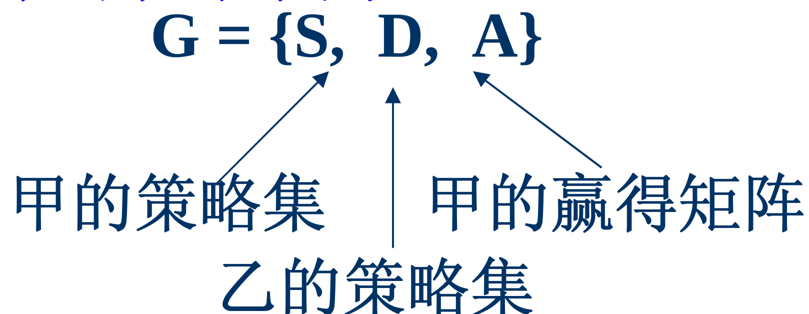
本课件的分类思路：

1. 二人有限零和对策（又称矩阵对策）

- **特点：**
  - 局中人为2；
  - 对策双方的策略均有限；
  - 对策双方的赢得值之和为零。

- **记矩阵对策为：**

G = {S, D, A}



- 例："齐王赛马"即是一个矩阵策略。

2. 二人有限非零和对策（又称双矩阵对策）

第三部分

二人有限零和对策

一、定义

设二人有限零和对策问题的局中人为I，Π

策略集为$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m\}, S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n\}$

则支付可以用矩阵A＝ $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 表示，

其中a_{ij}为I的得（也是Π的失），Π的得即为$-a_{ij}$。

故又**称二人有限零和对策为矩阵对策**，记为 $G=(S_1,S_2,A)$

二、纯策略与混合策略

纯策略是指确定的选择某策略；而混合策略则指以某一概率分布选择各策略。

三、纯策略对策的解

1. 引例

例 设一对策 $G=\{S,D,A\}$，其中 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$，$D=\{d_1,d_2,d_3\}$，其赢得矩阵为：

$$A=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

前提：

对策双方均理智

结论：

最不利中选最有利

问：双方局中人采用何策略最佳。

解： 可用下述表格表示上述寻找最优纯策略过程：

	d_1	d_2	d_3	$\min_j a_{ij}$
s_1	3	1	2	1
s_2	6	0	-3	-3
s_3	-5	-1	4	-5
$\max_i a_{ij}$	6	1	4	

故若双方都采取理智行为，局势 (s_1, d_2) 为最优纯策略.

2. 纯策略分析

（1）局中人甲对每个策略s_i的评价值为

$$s_i \xleftarrow{\text{评价}} f(s_i) = \min_j a_{ij}$$

故局中人甲选择策略模型为：

$$s_i^* \leftarrow \max_i f(s_i) = \max_i \min_j a_{ij} = V_{\max}$$

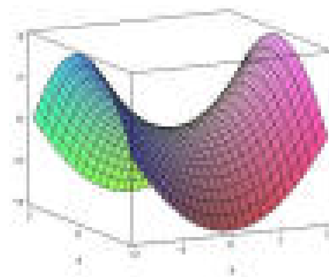
（2）局中人乙对每个策略d_j的评价值为

$$d_j \xleftarrow{\text{评价}} g(d_j) = \max_i a_{ij}$$

故局中人乙选择策略模型为：

$$d_j^* \leftarrow \min_j g(d_j) = \min_j \max_i a_{ij} = V_{\min}$$

3. 纯策略对策模型的解



(1) 鞍点与解

对于一个对策 $G=\{S,D,A\}$ ，如果有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{ij}^*$$

则称局势 (s_i^*, d_j^*) 为对策G的一个鞍点，

$V = a_{ij}^*$ 称为对策G之值。

例 上例中 $G=\{S,D,A\}$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

局势(s_1, d_2)构成一个鞍点，

局中人甲的最优策略为s_1，

局中人乙的最优策略为d_2，

对策值$V=1$

(2) 多鞍点与无鞍点对策

例 设有一矩阵对策如下，求它的解。

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

局势 (s_1,d_2) (s_1,d_4) (s_3,d_2) (s_3,d_4) 均构成鞍点，

此对策有多个解。

例： 矩阵对策赢得矩阵如下，试求它的解。

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

解：

$$V_L=\max_i \min_j a_{ij}=\max\{3,4\}=4 \Rightarrow i^*=2$$

$$V_U=\min_j \max_i a_{ij}=\min\{5,6\}=5 \Rightarrow j^*=1$$

故：该对策无鞍点，即无解。

例：齐王赛马为无鞍点对策

齐王 \ 田忌	β_1（上中下）	β_2（上下中）	β_3（中上下）	β_4（中下上）	β_5（下上中）	β_6（下中上）
α_1（上中下）	**3**	**1**	**1**	**1**	**-1**	**1**
α_2（上下中）	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**-1**
α_1（中上下）	**1**	**-1**	**3**	**1**	**1**	**1**
α_1（中下上）	**-1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**
α_1（下上中）	**1**	**1**	**1**	**-1**	**3**	**1**
α_1（下中上）	**1**	**1**	**-1**	**1**	**1**	**3**

4、优超原理

定义：

若A中第i,k行有$a_{ij} \ge a_{kj}, j=1\cdots n$ 称α_i优超于α_k 。

记$\alpha_i \succ \alpha_k$

若A中第j,l列有$a_{ij} \le a_{il}, i=1\cdots m$ 称β_j优超于β_l 。

记$\beta_j \succ \beta_l$

例：

$$A = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & 0 & 2 & 2 \\ \alpha_2 & 2 & 1 & 3 \\ \alpha_3 & 1 & 3 & 3 \end{matrix}$$



$$\alpha_3 \succ \alpha_1$$
$$\beta_2 \succ \beta_3$$

性质1：若$G=(S_1, S_2, A)$中，$\alpha_i \succ \alpha_k$，构造新的$G^{'}=(S_1^{'}, S_2^{'}, A^{'})$

其中$S_1^{'}$是S_1去掉α_k，$S_2^{'}=S_2$，$A^{'}$是A中去掉k行，则：

① $V_G = V_{G^{'}}$

② $y^{*'} = y^{*}$若$X^{*'} = (x_1^{*} \cdots x_{k-1}^{*},\ x_{k+1}^{*} \cdots x_m^{*})$

则$X^{*} = (x_1^{*} \cdots x_{k-1}^{*}, 0,\ x_{k+1}^{*} \cdots x_m^{*})$

例： 用优超原理求解下列对策

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\beta_1 \succ \beta_4]{\beta_1 \succ \beta_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_3 \succ \alpha_1 \\ \alpha_3 \succ \alpha_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \beta_1 \succ \beta_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_3 \succ \alpha_4} (2) = A'$$

对于A' $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 2$,即对策解是（$\alpha_3, \beta_1$）$V_G = 2$。

根据性质3，则$X^* = (0,0,1,0), Y^* = (1,0,0,0), V_{G^*} = 2$

四、混合策略对策的基本概念

无鞍点对策的求解方法是采用混合策略，混合策略就是局中人考虑以某种概率分布来选择他的各个策略。

1. 混合策略

m维概率向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0,$

称为局中人甲的一个混合策略，即局中人甲选择策略s_i的概率为x_i 。

同理可定义乙的混合策略。

例：“剪刀、石头、布” 游戏，若B的混合策略（0.4，0.3，0.3）

				B 石头(0.4)	剪子(0.3)	布(0.3)
A	石头(0.5)	0	1	-1
	剪子(0.2)	-1	0	1
	布 (0.3)	1	-1	0

则A选“石头”的期望赢得为： $0\times0.4 + 1\times0.3 + (-1)\times0.3=0$

则A选“剪子”的期望赢得为：$(-1)\times0.4 + 0\times0.3 + 1\times0.3= -0.1$

则A选“石头”的期望赢得为： $1\times0.4 + (-1)\times0.3 + 0\times0.3=0.1$

若又已知A的混合策略（0.5，0.2，0.3），则A的期望赢得为：

$$0\times0.5 + (-0.1)\times0.2 + 0.1\times0.3= 0.01$$

（同理，B的期望赢得为-0.01）

2．混合策略集合

称集合

$$S^* = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \middle| \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

为甲的混合策略集合；

$$D^* = \left\{ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0 \right\}$$

为乙的混合策略集合；

3．混合局势

当局中人甲选择混合策略x；局中人乙选择混合策略y，称(x,y)为一个混合局势。

4．收益期望函数

对于一个混合局势(x,y)，用

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{m}x_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=x^TAy$$

表示局中人甲在混合局势(x,y)时的收益期望值。

5．混合策略对策模型

对于一个纯策略对策 $G=(S,D,A)$ ，我们用

$G^*=(S^*,D^*,E)$ 表示一个混合策略矩阵对策及

G的一个混合扩充。

二、混合策略对策的解

1. 混合策略分析

对于混合策略对策 $G^* = (S^*, D^*, E)$

局中人甲的策略决策模型为：

$$\max_{x \in S^*} f(x) = \max_{x \in S^*} \min_{y \in D^*} E(x, y) = E(x^*, y_{x^*}) \to x^*$$

局中人乙的策略决策模型为：

$$\min_{y \in D^*} g(y) = \min_{y \in D^*} \max_{x \in S^*} E(x, y) = E(x_{y^*}, y^*) \to y^*$$

2. 混合扩充的解与值

G^*的值$V_{G^*}=E(X^*,Y^*)$满足：

$$E(X,Y^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(X^*,Y) \quad *式$$

G^*的解(X^*,Y^*)也称G在混合策略意义下的解.

分析*式：

$$E(X,Y^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(X^*,Y)$$

$$E(X^*,Y^*)=X^{*T}AY^*$$

$$=(x_1^*\cdots\cdots x_m^*)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}$$

分析左式：

$$E(X,Y^*) = X^T A Y^* = (x_1 \cdots\cdots x_m)\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \cdots\cdots x_m)\begin{pmatrix} A_1 Y^* \\ \vdots \\ A_m Y^* \end{pmatrix}$$

也可以写成：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 & A_1 Y^* \\ \vdots & \vdots \\ x_m & A_m Y^* \end{matrix} \longrightarrow \le \begin{matrix} x_1^* A_1 Y^* \\ \\ x_m^* A_m Y^* \end{matrix}$$

$$x_1^* A_1 Y^*$$

进一步：　　　中必有每个$A_i Y^* \leq V_{G^*}$

$$x_m^* A_m Y^*$$

因为若有某个$A_{i_0} Y^* > V_{G^*}$，则I出α_{i_0},即取X＝（0⋯1⋯0),此时$V_{i_0} > V_{G^*}$ 矛盾。

而且若有某 i^0，使$A_{i^0} Y^* > V_{G^*}$，则必有X_{i^0}=0。否则，Ⅱ可能得到比V_{G^*}更小的损失，矛盾。

对右半式也可作类似的分析，可得

$$V_{G^*} \leq X^{*T} A_j$$

3、混合策略的性质

性质1：

$$V = V_{G^*} \Leftrightarrow V \begin{cases} A_i Y \le V \\ X^T A_j \ge V \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

性质2：松紧定理

$$X^{*T}(V - AY^*) = 0$$

$$(V - X^{*T} A)Y^* = 0$$

其中 $V = \begin{pmatrix} V \\ \vdots \\ V \end{pmatrix}$

性质3：若$G=(S_1,S_2,A)$中，$\alpha_i \succ \alpha_k$，构造新的$G'=(S_1',S_2',A')$

其中S_1'是S_1去掉α_k，$S_2'=S_2$，A'是A中去掉k行，则：

①$V_G = V_{G'}$

②$y^{*'} = y^*$若$X^{*'} = (x_1^* \cdots x_{k-1}^*,\ x_{k+1}^* \cdots x_m^*)$

则$X^* = (x_1^* \cdots x_{k-1}^*, 0,\ x_{k+1}^* \cdots x_m^*)$

性质4：$G_1=(S_1,S_2,A_1), G_2=(S_1,S_2,A_2), A_1=(a_{ij}),$

$A_2=(a_{ij}+d)$ 则：G_1，G_2同解，并且$V_{G_2}=V_{G_1}+d$

性质5：$G_1=(S_1,S_2,A_1), G_2=(S_1,S_2,A_2), A_1=(a_{ij}),$

$A_2=(ka_{ij})$ 则：G_1，G_2同解，并且$V_{G_2}=kV_{G_1}$

2. 混合策略矩阵对策的线性规划解法

(1) 由G=（S_1, S_2, A）构造I和Ⅱ的LP

$$\text{I}\quad \max V \quad s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge V \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0\end{cases} \xrightarrow[\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{1}{V}]{\text{令}X_i = \frac{x_i}{V}} \min \sum_{i=1}^{m} X_i \quad s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}X_i \ge 1 \\ X_i \ge 0\end{cases}$$

$$\Pi\quad \min V \quad s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le V \\ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \ge 0\end{cases} \xrightarrow[\sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{V}]{\text{令}Y_j = \frac{y_j}{V}} \max \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j \le 1 \\ Y_j \ge 0\end{cases}$$

(2)　求解两个LP中的一个，可同时得X_i^*, Y_j^*, 则

$$V=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}X_i^*}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}Y_j^*}, x_i^*=VX_i^*, y_j^*=VY_j^*$$

注：　对于矩阵A为2×2阶的简单情形，记A＝$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$则

$$X^*=(\frac{d-c}{a-b-c+d},\frac{a-b}{a-b-c+d})\quad Y^*=(\frac{d-b}{a-b-c+d},\frac{a-c}{a-b-c+d}),$$

$$V^*=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$$

例6:

设：$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$，求解$G^*=(S^*,D^*,A)$。

先应用优超原理化简A

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_2 \succ \alpha_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_3 \succ \beta_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{a_{ij}+1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

现先求解$G'=(S_1',S_2',A')$

解法一：

求Π的最优策略Y^*,即求解线性规划问题：

$$\max(Y_1+Y_2)$$

$$s.t.\begin{cases} 3Y_2 \le 1 \\ 4Y_1 \le 1 \\ Y_1, Y_2 \ge 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解得到Y'及其对偶解X'：

$$Y' = (\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3})^T,\ X' = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4})^T,\ \frac{1}{V} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

最优策略 $X^* = \frac{12}{7}(0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4})^T = (0 \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{7})^T$

$$Y^* = \frac{12}{7}(0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3})^T = (0 \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7})^T$$

G^*的值 $V^* = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$

解法二：2×2矩阵可以直接按公式计算：

对于(S_1', S_2', A')

$$X' = \left(\frac{d-c}{a-b-c+d}, \frac{a-b}{a-b-c+d}\right) = \left(\frac{4}{7} \quad \frac{3}{7}\right)^T$$

$$Y' = \left(\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{a-c}{a-b-c+d}\right) = \left(\frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}\right)^T,$$

$$V' = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{12}{7}$$

所以对于(S_1^*, S_2^*, A)

$$X^* = \left(0 \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{7}\right)^T, Y^* = \left(0 \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}\right)^T, V^* = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$

例：“剪刀、石头、布”游戏，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{A+2} \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \min \quad z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$st\begin{cases}2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1\\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1\\ x_i \geq 0 (i = 1,2,3)\end{cases} \xrightarrow{\text{求解}} X = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})^{\mathrm{T}}$$

$$\xrightarrow{\text{归一化}} X^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$$

同理，

$$Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$$

第四部分

二人有限非零和对策

一、非零和对策的一般表达

1、局中人集合：$i = 1, 2, \ldots, n$

2、每个局中人的策略集：$S_i \ (i = 1, \cdots, n)$

3、每个局中人的赢得函数：$u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots s_n)$

对策的一般表达：$G=\{S_1, \cdots S_n; u_1, \cdots u_n\}$

二、纳什均衡

均衡（**Equilibrium**）是所有局中人的最优策略的组合，一般记为：

$$s^* = (s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$$

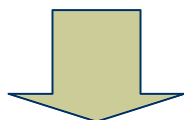
其中，s_i^* 是第i个局中人在均衡情况下的最优战略，即

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \neq s_i^*$$

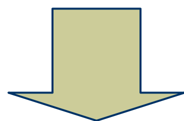
（$s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$ 表示除 i 之外所有局中人的策略组成的向量。）

均衡的层次：

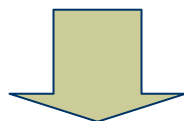
占优策略均衡



重复剔除的占优均衡

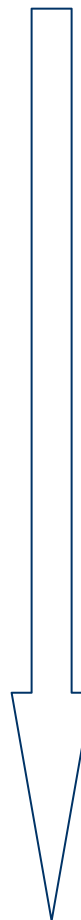


（纯策略）纳什均衡



混合策略纳什均衡

强



条件

弱

1. 占优策略均衡

考虑"囚犯困境"问题：

		II 坦白	II 不坦白
I	坦白	(−9, −9)	(0, −10)
I	不坦白	(−10, 0)	(−1, −1)

不论同伙选择什么策略，每个囚徒的最优策略是"坦白"。

定义：如果对应所有的 s_{-i}，s_i^* 是i的严格最优选择，即

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})\ \forall s_{-i}, \forall s_i' \neq s_i^*$$

则称 s_i^* 是i的占优策略(Dominant strategy)。

定义：如果对应所有的 i，s_i^* 是i的占优策略,则称策略组合

$$s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$$ 为占优策略均衡。

2. 重复剔除的占优均衡

考虑智猪博弈问题：

		小猪 按	小猪 等待
大猪	按	5，1	4，4
	等待	9，-1	0，0

"等待"是小猪的占优战略，而大猪无占优战略。

定义：令 s_i' 和 s_i'' 为局中人i的两个策略，如果

$$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})\ \forall s_{-i}$$

则 s_i' 称为i的劣策略(Dominated strategy)。

例：

		II B_1	B_2	B_3
I	A_1	1，0	1，2	0，1
	A_2	0，3	0，1	2，0

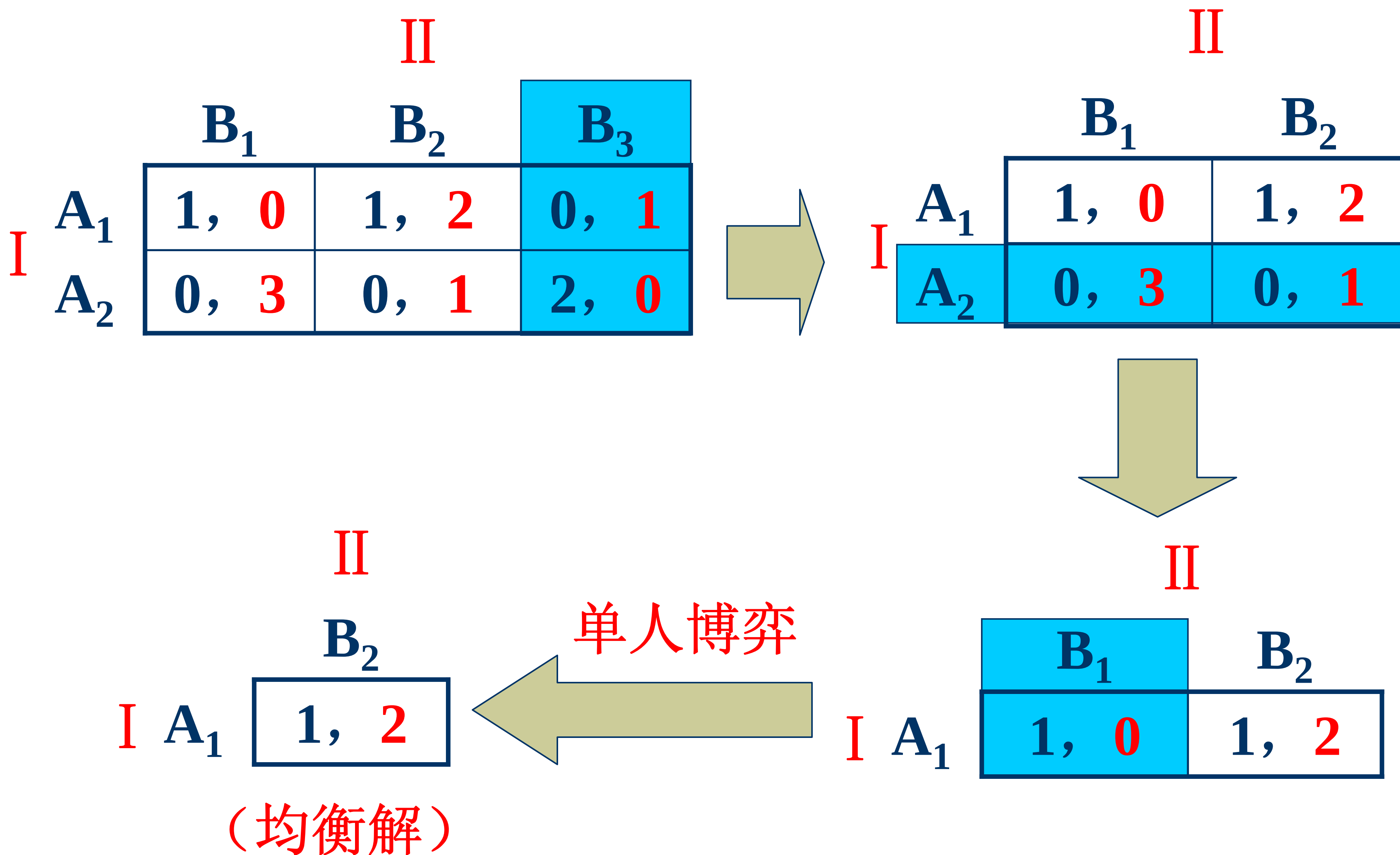
劣策略

可按如下思路寻找均衡解：

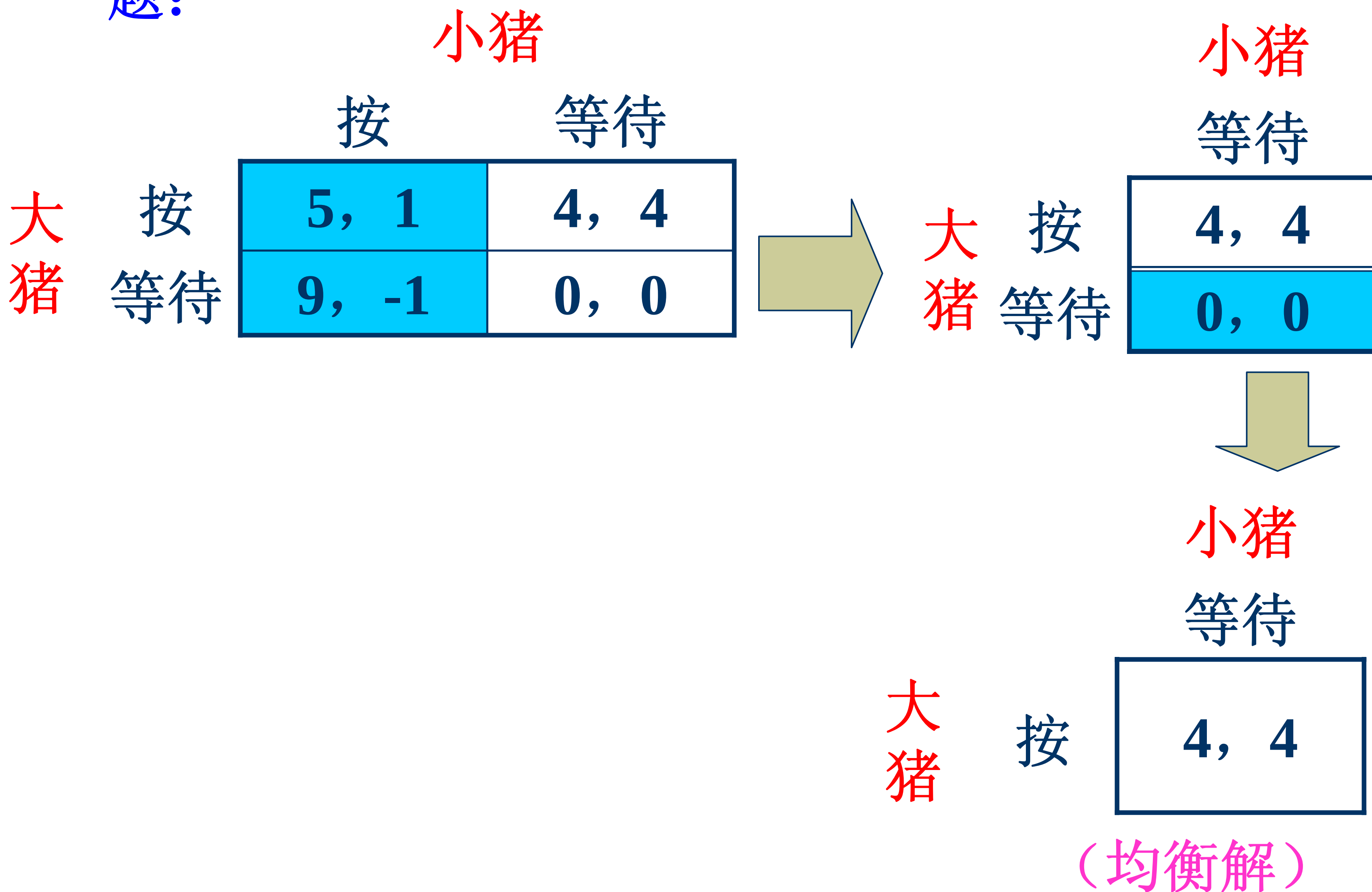
首先找出某个局中人的劣策略（如果存在），剔除该劣策略，得到新的博弈；再剔除该新博弈中的某个中人的劣策略。重复进行，直至只剩下唯一的策略组合为止，这个剩下的策略称为重复剔除的占优均衡（**Iterated dominance equilibrium**）。

前提假设：“理性”是所有局中人的共同知识（**Common Knowledge**）

例：求下面博弈的重复剔除的占优均衡解



例：智猪博弈问题：



3. 纳什均衡

例：（夫妇之争）夫妇俩商量晚上去哪里消遣。丈夫喜欢看足球比赛，而妻子喜欢去看芭蕾舞表演，夫妇都希望二人同往，不愿分开。

妻子

		足球	芭蕾
丈夫	足球	2，1	0，0
	芭蕾	0，0	1，2

问题：既不存在占优策略均衡，也不存在重复剔除的占优均衡。



纳什均衡

定义：对于博弈 $G=\{S_1, \cdots S_n; u_1, \cdots u_n\}$，策略组合 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$。如果对于每一个$i$，$s_i^*$ 是给定其它局中人选择 $s_{-i}^* = (s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ 的情况下第i个局中人的最优策略，即

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*) \ \forall s_i \in S_i, \forall i$$

则称该策略组合为一个纳什均衡。

✓ 纳什均衡的哲学意义

$s^* = (s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$ 表示n个局中人达成的一个协议，当这个协议可以自动实施（Self-enforcing）时，即没有任何局中人有积极性破坏这个协议，那么这个协议就构成纳什均衡。

否则，若至少存在某些局中人有积极性偏离这个协议，就构不成纳什均衡。

例：囚犯困境问题：

I \ II	坦白	抵赖
坦白	-8，-8	0，-10
抵赖	-10，0	-1，-1

例：智猪博弈问题：

大猪 \ 小猪	按	等待
按	5，1	4，4
等待	9，-1	0，0

例：（夫妇之争）夫妇俩商量晚上去哪里消遣。丈夫喜欢看足球比赛，而妻子喜欢去看芭蕾舞表演，夫妇都希望二人同往，不愿分开。

		妻子	
		芭蕾	足球
丈夫	芭蕾	1，4	0，0
	足球	0，0	4，1

纳什均衡解：（足球，足球）或（芭蕾，芭蕾）

✓ 解纳什均衡的划线法

设有两个局中人：A和B

Step 1: 考虑A，给定B的每一个策略，找出A的最优策略，并在其对应的赢得下面画一横线。

Step 2: 用类似的方法，找出B的最优策略。

Step 3: 都画横线的单元格即为纳什均衡。

例：求纳什均衡

局中人B

局中人A		L	C	R
	U	0，4	4，0	5，3
	M	4，0	0，4	5，3
	D	3，5	3，5	6，6

纳什均衡

总结:对矩阵A，按列求最大；对矩阵B，按行求最大。

✓ 零和博弈的鞍点对应于Nash均衡

例 考虑零和博弈 $G=\{S,D,A\}$，其中 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$，$D=\{d_1,d_2,d_3\}$，其赢得矩阵为：

$$A=\begin{matrix} & d_1 & d_2 & d_3 \\ s_1 & 3 & 1 & 2 \\ s_2 & 6 & 0 & -3 \\ s_3 & -5 & -1 & 4 \end{matrix}$$

鞍点

⇔

$$\begin{matrix} & d_1 & d_2 & d_3 \\ s_1 & 3,-3 & 1,-1 & 2,-2 \\ s_2 & 6,-6 & 0,0 & -3,3 \\ s_3 & -5,5 & -1,1 & 4,-4 \end{matrix}$$

Nash均衡

例：斗鸡博弈（**Chicken Game**）

两个人举着火棍从独木桥的两端走向中央进行火拼。每个人都有两种策略：继续前进，或退下阵来。若两人都继续前进，则两败俱伤；若一方前进另一方退下来，前进者取得胜利，退下来的丢了面子；若两人都退下来，两人都丢面子。赢得矩阵如下表所示。

		B 进	B 退
A	进	-3，-3	2，0
A	退	0，2	0，0

Nash均衡：一进一退

斗鸡博弈的应用

冷战期间，美苏在世界各地抢占地盘，如果一方已经抢占了一块地盘，另一方就设法占另一块地盘，而不是与对手竞争同一块地盘。

警察与游行队伍。

夫妻吵架。一般来说，吵得厉害了，不是妻子回娘家躲一躲，就是丈夫到院子里抽支烟。

斗鸡博弈的问题：谁退？两败俱伤亦有可能。

纳什均衡在经济中的应用举例

公共地的悲剧（Tragedy of the commons）

如果一种资源没有排他性的所有权，就会导致对这种资源的过渡使用。

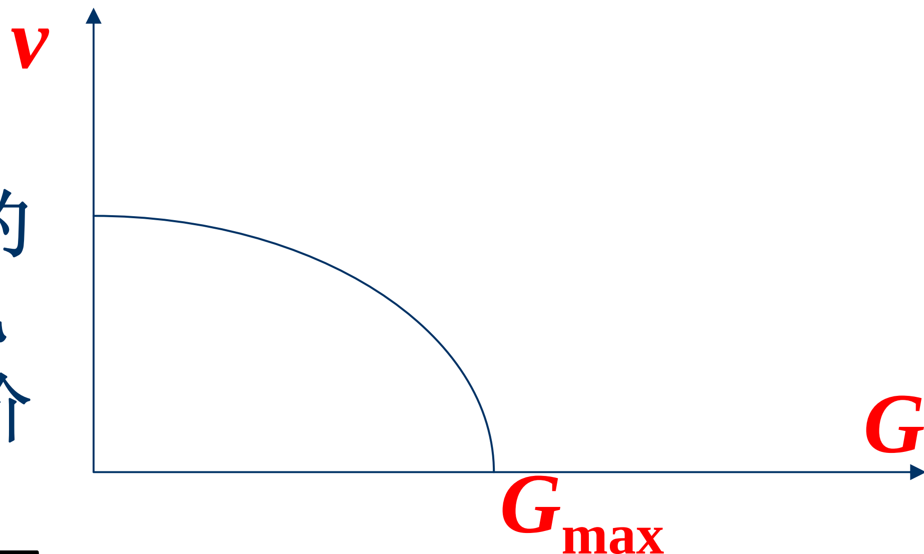
考虑一个有n个农民的村庄共同拥有一片草地，每个农民都有在草地上放牧的自由。每年春天，每个农民要决定自己养多少只羊。用g_i表示第i个农民饲养的数量，

$G=\sum_{i=1}^{n} g_i$ 表示总数量；v代表每只羊的平均价值。v是G的函数：$v=v(G)$ 。因为每只羊至少要一定数量的草才不至于饿死，有一个最大可存活的数量G_{max}：当

$G<G_{max}$时，$v(G)>0$；当$G \geqslant G_{max}$时，$v(G)=0$。

当草地上的羊很少时，增加一只羊也许不会对其它羊的价值有太大的不利影响，但随着饲养量的不断增加，每只羊的价值会急剧下降，因此：

$$\frac{\partial v}{\partial G} < 0; \frac{\partial^2 v}{\partial G^2} < 0$$



在该博弈中，每个农民的问题是选择g_i以最大化自己的利润。设购买每只羊的价格为c，则利润函数为：

$$\pi_i(g_1,\cdots,g_i,\cdots,g_n) = g_i v(\sum g_i) - g_i c\,; \quad i = 1,\cdots,n$$

最优化的条件为：

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial g_i} = v(G) + g_i v'(G) - c = 0; \quad i = 1,\cdots,n$$

上述n个优化函数的交叉点就是纳什均衡。

可以证明，纳什均衡的总饲养量大于社会最优的饲养量。

具体示例：设n=3，设每只羊的利润函数为

$v(G)=100-G=100-(g_1+g_2+g_3)$ ，设c =4

则3个农民的利润函数分别为：

$$\pi_i=g_i[100-(g_1+g_2+g_3)]-4g_i\ ;\ i=1,2,3$$

令 $\dfrac{\partial\pi_i}{\partial g_i}=0;\quad i=1,2,3$ ，并解联立方程组可得

$g_1^*=g_2^*=g_3^*=24$,带入利润函数得 $\pi_1^*=\pi_2^*=\pi_3^*=576$

换个角度，从总体利益最大化出发，总利润函数为：

$$\pi=G(100-G)-4G=96G-G^2$$

令 $\dfrac{d\pi}{dG}=0$ ⟹ $G^*=48,\pi^*=2304$

结论: (1)Nash均衡条件下，养羊总数24×3= 72，总利润576×3=1728;

（2）总利益最大条件下：养羊总数48，总利润2304。

4. 混合策略的纳什均衡

✓ 问题的提出——纯策略意义下，有可能不存在纳什均衡

例：小偷与守卫的博弈（泽尔腾，1996）

一小偷欲偷窃有一守卫看守的仓库，如果小偷去偷窃时守卫在睡觉，则小偷就能得手，否则要被抓住。假设小偷得手可偷得价值为 V 的赃物，若被抓住坐牢，负效用 $-P$。再设守卫睡觉而未被偷则有 S 的正效用，睡觉遭偷则要被解雇，负效用 $-D$。若小偷不偷，则无得无失，守卫不睡则出一份力争一份工资，无得无失。

守卫

		睡	不睡
小偷	偷	V, $-D$	$-P$, 0
	不偷	0, S	0, 0

→ 无纳什均衡

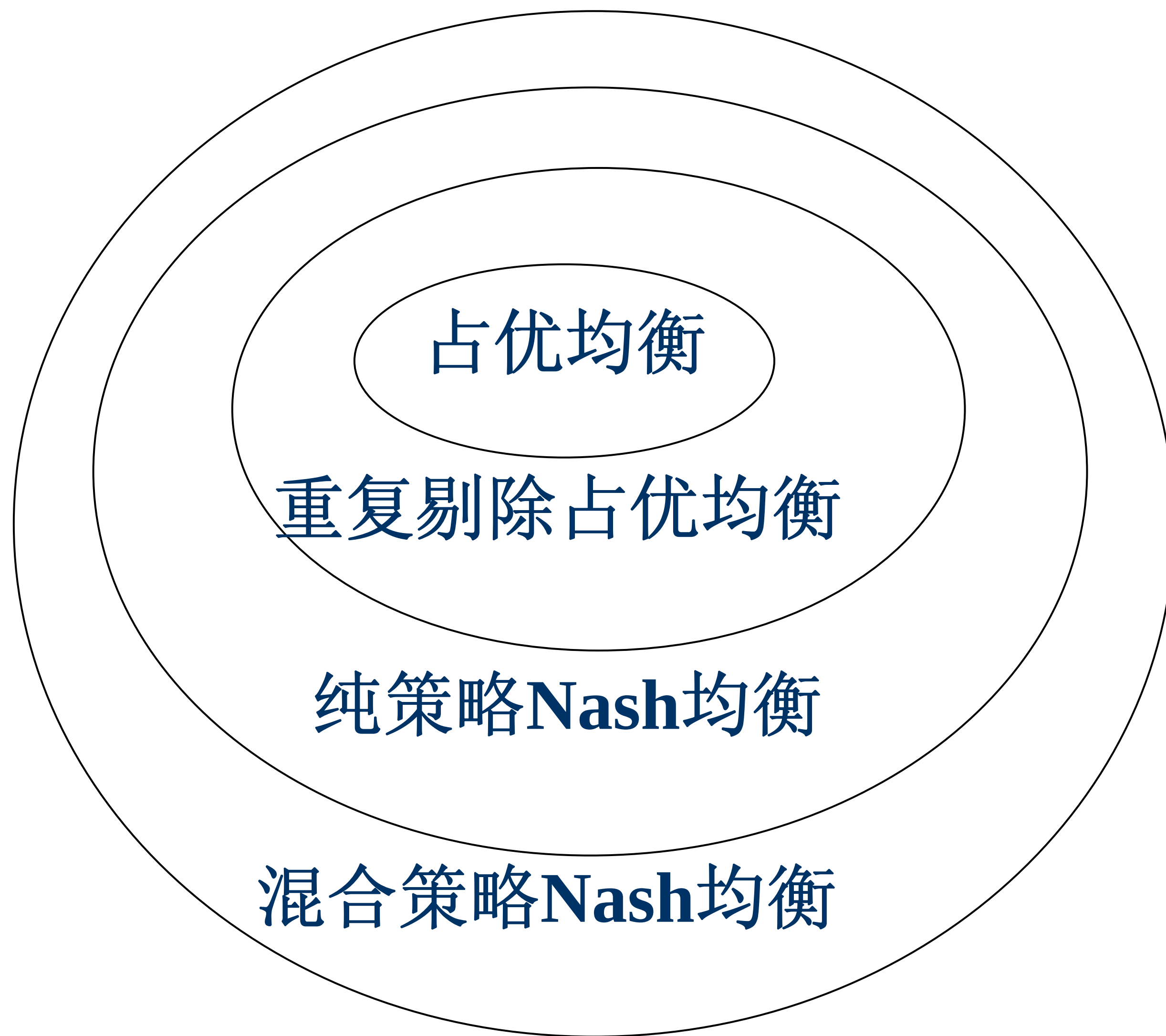


图　　不同均衡概念之间的关系

案例分析——“非典”疫情扩散和防治

背景：

2003年**4**月，流行性非典型肺炎从广东省通过输入性病例的传播进入北京。在华北地区“非典”疫情爆发初期，由于没有有效地进行预防和控制，疫情迅速扩散和蔓延，很快就开始在更广泛的区域内传播。这种局面的出现，和**SARS**具有极强的传染性有关，也与防治工作不力有关。由于政府的监管力度不够，少数医生逃避责任，医院之间也产生一种互相推诿病人的博弈关系。随着疫情的发展，中央政府采取果断措施，加强了领导和监管力度，逐步扭转了这种不利的局面。

疫情爆发初期的情况：

在北京爆发SARS的初期，重症患者出现死亡，给医护人员带来巨大恐慌，个别医院怕自己的医护人员感染和影响单位经济效益，拒收患者。当时情况下，由于对“非典”缺乏科学认识，政府对其严重性也认识不足，政府对医院没有建立严格有效的监管体制。医院面对的局面是一种“囚徒困境”式的博弈问题。

医院1 \ 医院2	拒收	救治
拒收	0，0	0，-1
救治	-1，0	-0.5，-0.5

均衡解：

（拒收，拒收）

结果：疫情扩散，影响到人民健康和社会稳定

疫情防治：

在疫情发展过程中，随着对**SARS**的逐步了解，政府及时总结经验教训，迅速出台一系列措施和规定来扭转当时的不利局面，如实行首诊负责制，对拒收发热病人的医院严惩不贷。如果医院不收治非典病人和疑似病人，将受到严厉的惩罚和面临强大的舆论压力。此时两个医院之间的博弈为：

医院2

医院1	拒收	救治
拒收	**-M，-M**	**-M，-1**
救治	**-1，-M**	**-0.5，-0.5**

均衡解：（救治，救治）

结果：疫情得到控制